Consideriamo il piatto del telaio che vibra a seguito dell'urto con la pallina come una molla rotazionale la cui frequenza di oscillazione può approssimata dalla seguente formula normalmente utilizzata per rappresentare il moto armonico (oscillazione armonica) in Fisica.

$$1)\ \omega = \sqrt{\frac{K}{I}}$$

Dove

$$2)\ \omega = 2 * \pi * f$$

π è una costante

f è la frequenza di oscillazione misurata

K è la costante di elasticità rotazionale del piatto (una misura di quanto si fletterebbe se applicassi una forza costante, (normalmente viene chiamata kr, ma la chiameremo K per semplicità)

I è il momento di inerzia del piatto del telaio rispetto al punto (o asse) intorno a cui oscilla.

$$3)\ I = \alpha * Mp$$

α è un coefficiente geometrico, chiamato anche fattore di forma e dipende appunto dalla forma del piatto del telaio

Mp è il peso del piatto del telaio in grammi (che non conosciamo), sarà sicuramente minore del peso dell'intero telaio.

Ora quando incolliamo una gomma possiamo fare le seguenti considerazioni:

- poiché il piatto e la gomma hanno la stessa forma, la geometria del piatto non cambia, in realtà aumenta lo spessore, ma poiché lo spessore è molto minore delle altre dimensioni del piatto (altezza e larghezza) la sua variazione può essere considerata trascurabile, quindi considero che il momento di inerzia aumenta linearmente con il peso della gomma, come se incollando la gomma avessi solo aggiunto peso al piatto del telaio.
- Poiché la gomma è molto più elastica del telaio, il suo contributo alla rigidità del telaio è trascurabile, ovvero, la costante di elasticità rotazionale del telaio (K) con la gomma incollata non cambia.

Queste due considerazioni vengono considerate valide anche per la seconda gomma che sarà incollata sull'altro lato del piatto.

Secondo le considerazioni fatte è possibile esprimere la frequenza di oscillazione del telaio con una gomma incollata ($\omega 1$) con la seguente formula

$$4)\ \omega 1 = \sqrt{\frac{K}{I\,(p+r)}} = \sqrt{\frac{K}{\alpha*(Mp+Mr)}}$$

Dove

ω1 è la nuova frequenza che misuro (f1) con la gomma incollata moltiplicata per la costante 2*π (ricordiamo, ω = 2*π*f).

$I\ (p + r)$ è il momento di inerzia del piatto con la gomma incollata

Mp è il peso del piatto in grammi, Mr è il peso della gomma in grammi, Per le considerazioni fatte
$I\ (p + r) = \alpha * (Mp + Mr)$

Ora facciamo il rapporto fra le formule della frequenza senza gomma e la frequenza con la gomma incollata (se a = b e c = d, allora a/b = c/d)

$$5)\ \frac{\omega}{\omega 1} = \frac{\sqrt{\frac{K}{\alpha*(Mp)}}}{\sqrt{\frac{K}{\alpha*(Mp+Mr)}}}$$

ovvero

$$6) \frac{2*\pi*f}{2*\pi*f1} = \frac{\sqrt{\frac{K}{\alpha*(Mp)}}}{\sqrt{\frac{K}{\alpha*(Mp+Mr)}}}$$

A sinistra della uguaglianza dividiamo a numeratore e denominatore per le costanti $2 * \pi$

$$7) \frac{f}{f1} = \frac{\sqrt{\frac{K}{\alpha*(Mp)}}}{\sqrt{\frac{K}{\alpha*(Mp+M\ \ )}}}$$

Elevo al quadrato entrambi i membri a sinistra e destra della uguaglianza (se a = b allora $a^2 = b^2$)

$$8) \left(\frac{f}{f1}\right)^2 = \frac{\frac{K}{\alpha*Mp}}{\frac{K}{\alpha*(Mp+Mr)}}$$

Ora a destra della uguaglianza a numeratore e denominatore dividiamo per K e moltiplichiamo per α (in questo modo non abbiamo bisogno di conoscere K né α)

$$9)\left(\frac{f}{f1}\right)^2=\frac{\frac{1}{Mp}}{\frac{1}{Mp+Mr}}$$

Ovvero

$$10)\qquad \left(\frac{f}{f1}\right)^2=\frac{1}{Mp}*(Mp+Mr)$$

$$11)\qquad \left(\frac{f}{f1}\right)^2=\frac{Mp+Mr}{Mp}$$

Se ho misurato il peso della gomma e frequenze del telaio con e senza gomma incollata posso ricavarmi il peso del piatto del telaio Mp . Quindi moltiplico entrambi i membri per Mp

$$12)\qquad Mp*\left(\frac{f}{f1}\right)^2=Mp+Mr$$

Porto a destra dell’uguaglianza tutti i termini con Mp per esplicitarlo

$$13)\qquad Mp*\left(\frac{f}{f1}\right)^2-Mp=Mr$$

ovvero

$$14)\qquad Mp*\left(\left(\frac{f}{f1}\right)^2-1\right)=Mr$$

ovvero

$$15)\qquad Mp=\frac{Mr}{\left(\frac{f}{f1}\right)^2-1}$$

Dove:

Mp è il peso del piatto del telaio in grammi che come già detto sarà sicuramente minore del peso dell'intero telaio

f è la frequenza del solo telaio

f1 è la frequenza del telaio con una gomma incollata (la frequenza del picco se faccio rimbalzare la pallina sul legno o sulla gomma è più o meno uguale), f1 sarà sempre minore di f

Mr è il peso della gomma in grammi

Se vogliamo conoscere che frequenza avrà la racchetta con due gomme anche diverse da quella con cui ho fatto la prova:

chiamo f2 il valore della frequenza del telaio con due gomme incollate (il valore che voglio prevedere)

M2 la somma del peso misurato delle due gomme che incolliamo (questa informazione è necessaria).

f è la frequenza del solo telaio senza gomme, precedentemente misurato

Mp è il peso del piatto del telaio in grammi trovato con la formula precedente.

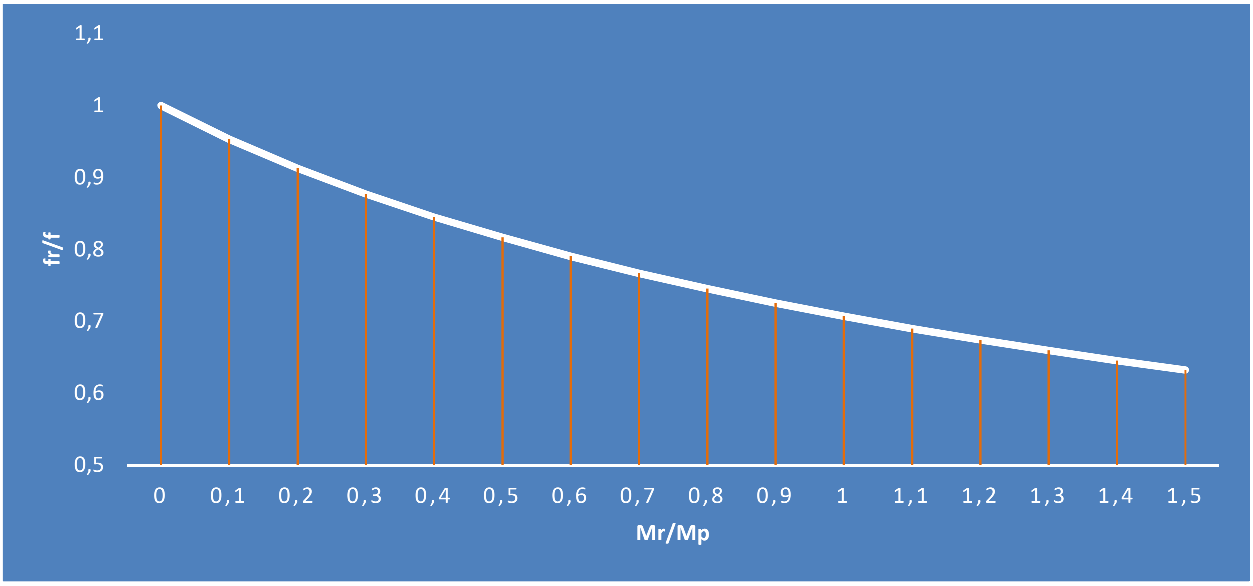
16) $$\mathrm{f2} = \mathrm{f} * \sqrt{\frac{Mp}{Mp+M2}}$$

Ecco un grafico che illustra come cambia la frequenza al variare del peso del piatto del telaio con le gomme incollate.

Sull’asse delle x il rapporto fra il peso delle gomme incollate (Mr) e il peso del piatto (Mp).

Sull’asse delle y il rapporto fra la frequenza del telaio con le gomme incollate (fr) e quella del telaio senza gomme (f).

man mano che aumenta il peso delle gomme in rapporto al peso del piatto del telaio, la frequenza tenderà a scendere con questo andamento



Per questo motivo la sola frequenza del telaio non è sufficiente per prevedere come si comporterà la racchetta assemblata (che sensazione avremo giocando): dobbiamo conoscere anche il peso del piatto (che è correlato col peso del telaio) e il peso delle gomme.