



# Il sistema di rating Elo nel Tennis Tavolo italiano

Allegato tecnico del regolamento di calcolo della classifica individuale

5 settembre 2017

## 1 Struttura del sistema

Il sistema di rating ha come riferimento due periodi temporali che ne definiscono la struttura. Vi è il periodo annuale, da inizio Settembre a fine Giugno dell'anno successivo, durante il quale i giocatori disputano gli incontri, sia di campionato sia nei tornei, e guadagnano o perdono punti a seconda dei risultati.

All'inizio del periodo annuale viene definita una classifica iniziale dei giocatori (*CI*) che viene in seguito aggiornata alla fine di ogni mese in base ai risultati ottenuti negli incontri di quel mese. A fine anno, la classifica finale (*CF*) si ottiene applicando ulteriori regole al risultato dall'ultimo aggiornamento di fine Giugno.

Rispetto alla classifica, i giocatori possono essere in uno dei seguenti stati:

1. **classificato:** il giocatore è regolarmente inserito nella classifica mediante l'assegnazione di un punteggio che cambia durante l'anno per effetto degli incontri disputati.
2. **non classificato:** al giocatore viene inizialmente assegnato un punteggio provvisorio. Anche questo punteggio cambia durante l'anno per effetto degli incontri disputati, ma con regole differenti da quelle del punto precedente.

3. **fuori quadro:** il giocatore aveva un punteggio regolarmente assegnato (classificato), ma per un dato periodo non ha disputato incontri. Per ritornare in classifica deve disputare un certo numero di incontri.<sup>1</sup>

Un giocatore non classificato (dunque con un punteggio provvisorio) diviene classificato alla fine di un dato mese se da inizio anno (Settembre) a quel mese disputa almeno **10** incontri con giocatori classificati e ne vince almeno **1**.

Per esempio, supponiamo che il giocatore Mario Rossi ad inizio anno risulti non classificato e gli venga quindi assegnato un punteggio provvisorio. Se alla fine di Dicembre ha disputato 9 incontri, con 1 vittoria, resta non classificato e il suo punteggio resta provvisorio. Se il mese successivo, alla fine cioè di Gennaio, il numero di incontri disputati sale a 12, in quel momento (e non alla fine del 10° incontro che cade all'interno di Gennaio) gli viene assegnato un punteggio definitivo. Ne segue che i punti relativi all'11-esimo e al 12-esimo incontro sono comunque da assegnare secondo le regole con cui si gestiscono i punteggi provvisori.

Se il punteggio di un giocatore resta provvisorio al termine del periodo annuale (fine Giugno), egli non viene inserito nella classifica finale e all'inizio dell'anno seguente il suo stato resta quello di non classificato, con punteggio iniziale che viene riassegnato e numero di incontri disputati/vinti azzerato.

E' prevista la normalizzazione della classifica finale  $CF$  in modo che i punti di ogni giocatore cadano nell'intervallo  $[500 \dots 15000]$ . Pertanto il primo classificato (o i primi classificati) avranno per definizione 15000 punti e l'ultimo (o gli ultimi) 500 punti.

## 1.1 Aggiornamento del rating in base ai risultati

L'aggiornamento della classifica avviene come si è detto alla fine di ogni mese. La formula considera la classifica all'inizio di quel mese e gli incontri che i giocatori hanno disputato in quel mese.

Per il giocatore  $A$  che ha disputato  $N$  incontri in un dato mese, contro gli avversari  $P_1, \dots, P_N$  la variazione di punti è data da:

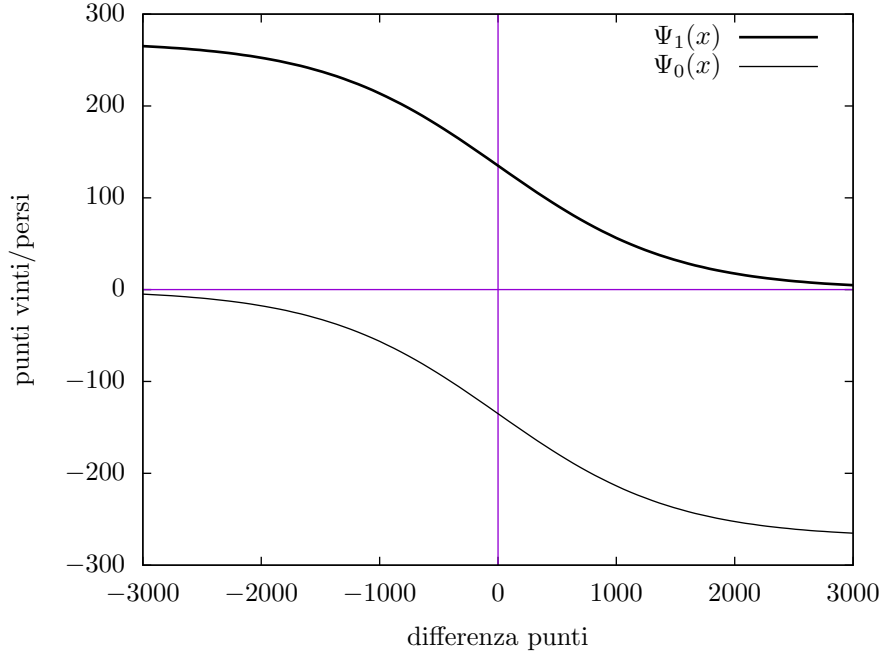
$$R'_A = R_A + \sum_{m=1}^N \gamma_m \cdot K \cdot (S_{A,P_m} - E_{A,P_m}) + \beta \quad (1)$$

ove  $R_A$  è il rating di  $A$  ad inizio mese,  $R'_A$  il nuovo rating,  $\gamma_m$  l'opportuno coefficiente di peso per l'incontro  $m$ -esimo,  $K$  una costante che definiamo tra poco,  $S_{A,P_m} \in \{0, 1\}$  un coefficiente che vale 1 se  $A$  vince contro  $P_m$ , 0 se perde e  $\beta$  la somma algebrica dei bonus/malus (ottenuti nei tornei).

Posto  $B = P_m$ , il termine  $E_{A,B}$  è responsabile dei punti assegnati nel singolo incontro e vale:

---

<sup>1</sup>I dettagli vanno oltre lo scopo di questo documento e sono da ricercare nel regolamento ufficiale.



$$E_{A,B}(R_A, R_B) = \frac{1}{1 + e^{(R_B - R_A)/\sigma}} \quad (2)$$

Il valore dei parametri nelle eq. (1) e (2) è:  $K = 270$  ( $K = 800$  se il giocatore ha un punteggio provvisorio),  $\sigma = 750$ . Posto  $x = R_A - R_B$  la differenza di rating fra  $A$  e  $B$ , si possono allora definire due funzioni  $\Psi_1$  e  $\Psi_0$  come:

$$\Psi_1(x) = 270 \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-x/750}}\right) \quad (3)$$

e

$$\Psi_0(x) = -270 \cdot \frac{1}{1 + e^{-x/750}} \quad (4)$$

che rappresentano il numero di punti assegnati al giocatore  $A$  rispettivamente quando vince e quando perde l'incontro contro  $B$ .

Il grafico di fig.1.1 mostra i punti vinti e persi in funzione di  $x$ .

Sia dal grafico di fig. 1.1, sia dalle definizioni stesse delle (3) e (4) si evincono importanti proprietà strutturali (valide a condizione che entrambi i giocatori siano classificati):

1. esistono un tetto massimo pari a  $K = 270$  e un tetto minimo di 0, sia per i punti vinti, sia per i punti persi, qualunque sia il rating iniziale dei giocatori.

2. la quantità di punti guadagnati dal vincitore nel singolo incontro è identica a quella persa dall'avversario nello stesso incontro. La somma dei punti dei due giocatori prima e dopo l'incontro rimane quindi costante. I punti si trasferiscono dal perdente al vincitore, ma l'incontro in sé non genera punti dal nulla e nemmeno ne distrugge.
3. quando il rating dei giocatori è simile  $R_A \approx R_B$ , la differenza fra i punti assegnati al vincitore col metodo classico (dei ricicli) è piccola. Per esempio se  $R_A = R_B \rightarrow x = 0$ , il nuovo metodo assegna 135 punti al vincitore laddove quello dei ricicli ne assegnava 160. Tuttavia il nuovo sistema è soggetto ad un tasso di inflazione molto più basso, dovuto al fatto che un incontro non genera punti dal nulla (vedere punto precedente).
4. il termine  $E_{A,B}$  definito nella (2) prende il nome di *valore atteso* e indica la probabilità (stimata) che il giocatore con rating iniziale  $R_A$  vinca contro  $R_B$ . Da notare i tre casi interessanti:  $R_A \gg R_B \rightarrow E_{A,B} \approx 1$ ,  $R_A \ll R_B \rightarrow E_{A,B} \approx 0$  e infine  $R_A = R_B \rightarrow E_{A,B} = 1/2$ .
5. le due funzioni  $\Psi_1(x)$  e  $\Psi_0(x)$  sono continue in ogni loro punto, così come tutte le loro derivate di ordine  $n \geq 1$ . Questo permette di evitare punti di discontinuità o angolosi che potrebbero produrre squilibri nei valori di rating.
6. il sistema così definito, nel lungo termine è autoriparante. Anche supponendo che l'assegnazione del rating iniziale non sia accurata, il continuo disputare incontri, porta il rating attuale a livellarsi su quelle che sono effettivamente le probabilità di vittoria di un giocatore rispetto a un dato avversario. Il sistema converge cioè verso l'equità.
7. durante l'anno è possibile che alcuni giocatori abbiano punteggi negativi. La normalizzazione di fine anno tuttavia previene questa casistica nella classifica finale  $CF$ .

Nel caso ci si trovi invece con dei giocatori non classificati, si applicano le (5) e (6), una variante delle (3) ed (4) con il coefficiente  $K = 800$ .

$$\Psi_1^*(x) = 800 \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-x/750}}\right) \quad (5)$$

e

$$\Psi_0^*(x) = -800 \cdot \frac{1}{1 + e^{-x/750}} \quad (6)$$

## 1.2 Esempi di calcolo

Presentiamo qui alcuni esempi pratici per il calcolo della variazione di rating fra due giocatori.

### 1.2.1 Esempio

Il giocatore  $A$  con 8237 punti gioca e vince contro il giocatore  $B$  che ha 7912 punti. L'incontro ha peso unitario ( $\gamma = 1$ ) ed entrambi i giocatori sono classificati (i.e. punteggio **non provvisorio**). Di quanto varia il loro rating?

La differenza punti è:  $8237 - 7912 = 325$  punti. Siccome  $A$  vince, la sua variazione di rating è data dalla  $\gamma\Psi_1(325) = \Psi_1(325)$ . Pertanto sostituendo nella (3) si ottiene:

$$\Delta_A = \Psi_1(325) = 270 \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-325/750}}\right) \approx 270 \cdot (1 - 0.60667) = 106.1991 \quad (7)$$

Notare che nel calcolo dell'esponenziale conviene considerare almeno 5 decimali perchè il risultato va poi moltiplicato per  $K$ . Il giocatore  $B$ , essendo nello stesso stato di  $A$  (in questo caso, classificato) perde gli stessi punti.

E' tuttavia più corretto calcolare il valore sostituendo  $x = -325$ , cioè il valore di prima col segno cambiato perchè ora è riferito a  $B$ , nella eq. (4).

$$\Delta_B = \Psi_0(-325) = -270 \cdot \frac{1}{1 + e^{+325/750}} \approx -270 \cdot 0.39333 = -106.1991 \quad (8)$$

### 1.2.2 Esempio

Si consideri ora l'esempio precedente assumendo però che il punteggio del giocatore  $B$  sia provvisorio. Come cambia l'assegnazione dei punti?

Per il giocatore  $A$  si applica sempre l'eq. (7) e i punti non cambiano rispetto a prima. Col giocatore  $B$  invece si deve sostituire la differenza di punti nell'eq. (6) che pertanto diviene:

$$\Delta_B = \Psi_0^*(-325) = -800 \cdot \frac{1}{1 + e^{+325/750}} \approx -800 \cdot 0.39333 = -314.664 \quad (9)$$

In questo caso la somma dei punti vinti e persi non è più zero come nel caso precedente.

### 1.2.3 Esempio

Cosa succede invece se è  $B$  con punteggio provvisorio a vincere contro  $A$  classificato?

In questo caso la differenza è di -325 punti, pertanto si applica per  $B$  la (5) e per  $A$  la (4) ottenendo:

$$\Delta_B = \Psi_1^*(-325) = 800 \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + e^{+325/750}}\right) \approx 800 \cdot (1 - 0.39333) = 485.336 \quad (10)$$

e

$$\Delta_A = \Psi_0(325) = -270 \cdot \frac{1}{1 + e^{-325/750}} \approx -270 \cdot 0.60666 = -163.7982 \quad (11)$$

### 1.3 Tabella per calcolo manuale

E' possibile anche calcolare il guadagno/perdita punti in via approssimata con la seguente tabella:

Tabella 1: valori tabulati per la funzione  $\Psi_1$

Delta	Punti	Delta	Punti	Delta	Punti	Delta	Punti
-3000	265.144	-1500	237.815	0	135.000	1500	32.185
-2980	265.015	-1480	237.052	20	133.200	1520	31.436
-2960	264.883	-1460	236.272	40	131.401	1540	30.703
-2940	264.747	-1440	235.477	60	129.603	1560	29.985
-2920	264.608	-1420	234.666	80	127.807	1580	29.282
-2900	264.465	-1400	233.839	100	126.013	1600	28.593
-2880	264.319	-1380	232.996	120	124.223	1620	27.918
-2860	264.169	-1360	232.136	140	122.436	1640	27.258
-2840	264.015	-1340	231.260	160	120.654	1660	26.611
-2820	263.856	-1320	230.367	180	118.877	1680	25.978
-2800	263.694	-1300	229.456	200	117.106	1700	25.359
-2780	263.528	-1280	228.529	220	115.341	1720	24.753
-2760	263.357	-1260	227.584	240	113.582	1740	24.160
-2740	263.182	-1240	226.622	260	111.832	1760	23.579
-2720	263.003	-1220	225.642	280	110.089	1780	23.012
-2700	262.819	-1200	224.645	300	108.354	1800	22.457
-2680	262.630	-1180	223.630	320	106.629	1820	21.914
-2660	262.436	-1160	222.597	340	104.914	1840	21.383
-2640	262.238	-1140	221.545	360	103.208	1860	20.863
-2620	262.034	-1120	220.476	380	101.513	1880	20.356
-2600	261.826	-1100	219.389	400	99.830	1900	19.860
-2580	261.612	-1080	218.283	420	98.158	1920	19.375
-2560	261.392	-1060	217.159	440	96.498	1940	18.900
-2540	261.167	-1040	216.016	460	94.851	1960	18.437
-2520	260.936	-1020	214.855	480	93.217	1980	17.984
-2500	260.700	-1000	213.676	500	91.596	2000	17.542
-2480	260.457	-980	212.478	520	89.989	2020	17.109
-2460	260.209	-960	211.261	540	88.396	2040	16.687

Continua alla pagina successiva

**Tabella 1 – continua dalla pagina precedente**

<b>Delta</b>	<b>Punti</b>	<b>Delta</b>	<b>Punti</b>	<b>Delta</b>	<b>Punti</b>	<b>Delta</b>	<b>Punti</b>
-2440	259.954	-940	210.027	560	86.818	2060	16.274
-2420	259.693	-920	208.773	580	85.255	2080	15.871
-2400	259.425	-900	207.502	600	83.707	2100	15.478
-2380	259.151	-880	206.212	620	82.175	2120	15.093
-2360	258.870	-860	204.903	640	80.658	2140	14.718
-2340	258.582	-840	203.577	660	79.158	2160	14.351
-2320	258.287	-820	202.232	680	77.674	2180	13.993
-2300	257.984	-800	200.870	700	76.207	2200	13.643
-2280	257.674	-780	199.490	720	74.757	2220	13.302
-2260	257.357	-760	198.091	740	73.324	2240	12.969
-2240	257.031	-740	196.676	760	71.909	2260	12.643
-2220	256.698	-720	195.243	780	70.510	2280	12.326
-2200	256.357	-700	193.793	800	69.130	2300	12.016
-2180	256.007	-680	192.326	820	67.768	2320	11.713
-2160	255.649	-660	190.842	840	66.423	2340	11.418
-2140	255.282	-640	189.342	860	65.097	2360	11.130
-2120	254.907	-620	187.825	880	63.788	2380	10.849
-2100	254.522	-600	186.293	900	62.498	2400	10.575
-2080	254.129	-580	184.745	920	61.227	2420	10.307
-2060	253.726	-560	183.182	940	59.973	2440	10.046
-2040	253.313	-540	181.604	960	58.739	2460	9.791
-2020	252.891	-520	180.011	980	57.522	2480	9.543
-2000	252.458	-500	178.404	1000	56.324	2500	9.300
-1980	252.016	-480	176.783	1020	55.145	2520	9.064
-1960	251.563	-460	175.149	1040	53.984	2540	8.833
-1940	251.100	-440	173.502	1060	52.841	2560	8.608
-1920	250.625	-420	171.842	1080	51.717	2580	8.388
-1900	250.140	-400	170.170	1100	50.611	2600	8.174
-1880	249.644	-380	168.487	1120	49.524	2620	7.966
-1860	249.137	-360	166.792	1140	48.455	2640	7.762
-1840	248.617	-340	165.086	1160	47.403	2660	7.564
-1820	248.086	-320	163.371	1180	46.370	2680	7.370
-1800	247.543	-300	161.646	1200	45.355	2700	7.181
-1780	246.988	-280	159.911	1220	44.358	2720	6.997
-1760	246.421	-260	158.168	1240	43.378	2740	6.818
-1740	245.840	-240	156.418	1260	42.416	2760	6.643
-1720	245.247	-220	154.659	1280	41.471	2780	6.472
-1700	244.641	-200	152.894	1300	40.544	2800	6.306
-1680	244.022	-180	151.123	1320	39.633	2820	6.144
-1660	243.389	-160	149.346	1340	38.740	2840	5.985
-1640	242.742	-140	147.564	1360	37.864	2860	5.831
-1620	242.082	-120	145.777	1380	37.004	2880	5.681
-1600	241.407	-100	143.987	1400	36.161	2900	5.535
Continua alla pagina successiva							

**Tabella 1 – continua dalla pagina precedente**

<b>Delta</b>	<b>Punti</b>	<b>Delta</b>	<b>Punti</b>	<b>Delta</b>	<b>Punti</b>	<b>Delta</b>	<b>Punti</b>
-1580	240.718	-80	142.193	1420	35.334	2920	5.392
-1560	240.015	-60	140.397	1440	34.523	2940	5.253
-1540	239.297	-40	138.599	1460	33.728	2960	5.117
-1520	238.564	-20	136.800	1480	32.948	2980	4.985

In riferimento al primo esempio la tabella ci aiuta ad approssimare la  $\Psi_1(325)$  senza l'uso di una calcolatrice. Si può osservare infatti che la quantità di punti cade fra i valori tabulati:  $\Psi_1(320) = 106.629$  e  $\Psi_1(340) = 104.914$ , in accordo col valore 106.1991 calcolato utilizzando la formula esplicita.